**Лабораторна робота 11. Метод найменших квадратів**

Загальний метод найменших квадратів використовується при необхідності наблизити до еталонної функції лінійну комбінацію відомих функцій тобто знайти такі , щоб

(1)

Тут є наперед заданим набором еталонних точок; – кількість таких точок.

Звісно, можна відшукати мінімум по сумі модулів відхилень від еталонних значень, але при використанні квадратів знак похибки теж не впливає на загальну суму, і похибки більші за модулем впливають на результат значно сильніше, що зумовлює більш рівномірне наближення до еталонної функції.

Сума (1) фактично є завжди не від’ємною функцією від змінних, а її мінімум є екстремумом в якому всі часткові похідні по рівні нулю. Для спрощення записів середнє арифметичне **позначатимемо рискою** над відповідними змінними. Тепер перетворимо вираз (1) і знайдемо всі часткові похідні:

Якщо прийняти , то отримаємо вираз, придатний для пошуку часткових похідних:

Похідна по змінній буде рівна:

(2)

Для знаходження екстремуму прирівняємо похідні до нуля, після чого отримаємо систему лінійних рівнянь:

……

Або при розкритті знаків сум

(3)

Відповідно, якщо система (3) має єдиний розв’язок то він є єдиним екстремумом-мінімумом (бо максимальна похибка звісно не обмежена).

Пошук найближчої прямої на основі методу найменших квадратів краще провести використовуючи систему (3). Для опису прямої необхідно мати дві функції лінійні комбінації яких дають рівняння прямих:

*(4)*

Отримаємо систему:

Розв’язавши систему в загальному випадку остаточно матимемо:

(4.1)

.

Тут

, , , .

Наближення параболою методом найменших квадратів проводиться аналогічно, але тут необхідно взяти три функції: *,*

За (2) маємо систему:

,

(5)

.

і маємо наступний вираз:

(6)

Тут

, , , де - відповідний степінь .

Приклади:

1. Даний масив точок. Побудувати рівняння прямої, яка має найменше середньоквадратичне відхилення. Побудувати графік та відмітити на ньому точки заданого масиву.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,2 | 0,5 | 3,4 | 2,1 | 3,3 | 2,6 | 4,4 | 4,3 | 1 |
|  | 2,91 | 3,51 | -1,51 | 0,99 | -1,27 | 0,48 | -2,93 | -2,55 | 2,55 |

Розв’язання:

Знайдемо величини для розрахунку за виразом (4.1)

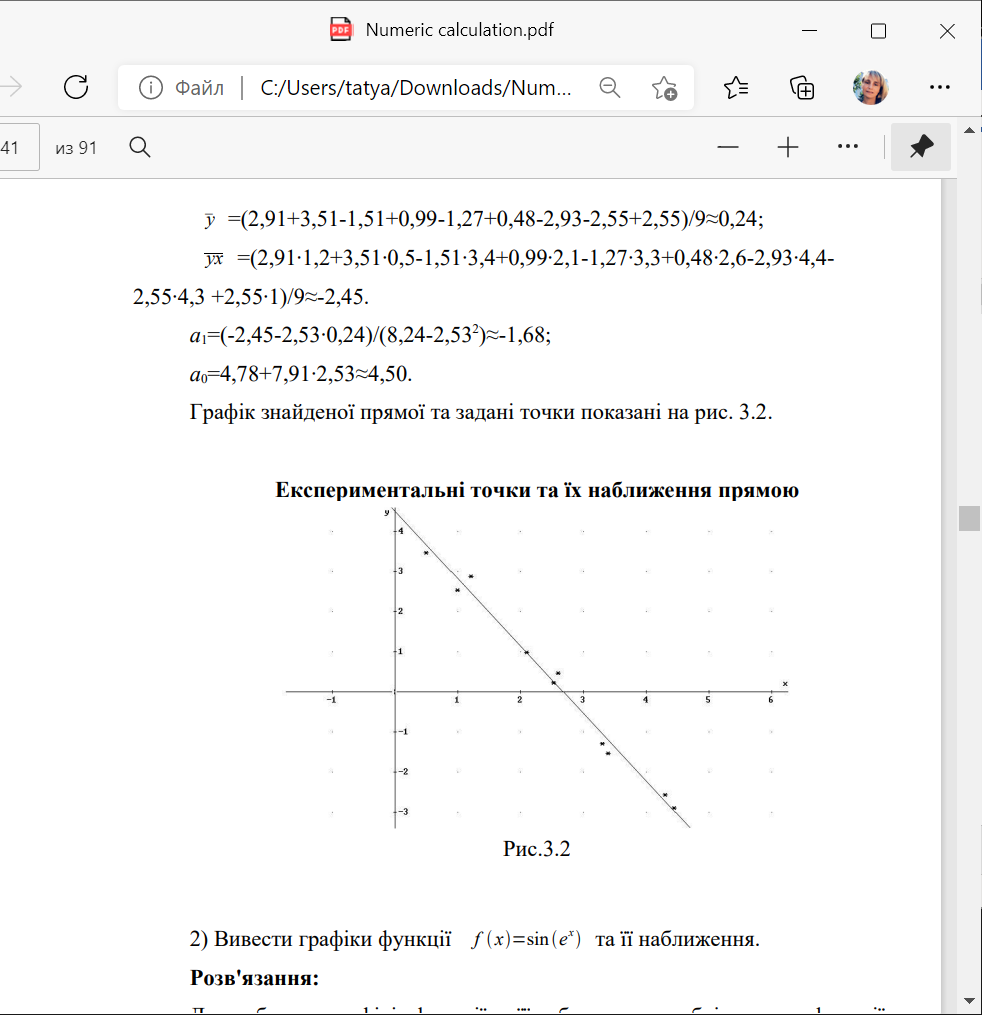
.

Підставимо в рівняння (4) знайдені коефіцієнти

(7)

Графік знайденої прямої (7) та задані точки показані на рис.1

**Експериментальні точки та їх наближення прямою**

Рис1

**Завдання**.

Для функції свого варіанту побудуйте таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Для цих даних побудуйте наближення прямою (обов’язково) та параболою (за бажанням) методом найменших квадратів. Побудуйте на графіку точки та графіки наближень.

|  |  |
| --- | --- |
| Номер вар-ту |  |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 8 |  |
| 9 |  |
| 10 |  |
| 11 |  |
| 12 |  |
| 13 |  |
| 14 |  |
| 15 |  |
| 16 |  |
| 17 |  |
| 18 |  |
| 19 |  |
| 20 |  |
| 21 |  |
| 22 |  |
| 23 |  |
| 24 |  |
| 25 |  |
| 26 |  |
| 27 |  |
| 28 |  |
| 29 |  |
| 30 |  |

**Код**

import numpy as np

#import pandas as pd

import matplotlib.pyplot as plt

def func(x):

return x\*np.cos(x)

x = np.array ([i\*0.1 for i in range(1, 11 )]) # задаємо x генератором списків

y = np.array([func(x)])

print ('x=',x)

print ('y=',y)

mean\_x = np.mean(x) #середнє значення х

mean\_y = np.mean(y) #cереднє значення y

mean\_x2 = np.mean(x\*\*2)

mean\_xy = np.mean (x\*y)

print('mean\_x=', mean\_x, '\n', 'mean\_y=', mean\_y, '\n', 'mean\_xy=', mean\_xy, '\n', 'mean\_x2=',mean\_x2)

a1 = (mean\_xy - mean\_x\*mean\_y)/(mean\_x2\*(np.mean(x))\*\*2)

a0 = mean\_y - (a1\* mean\_x)

print('Coefficients', 'a0=', round(a0,2), 'a1=', round(a1,2))

plt.plot(x, a0\*x + a1, 'r', label='Fitted line')

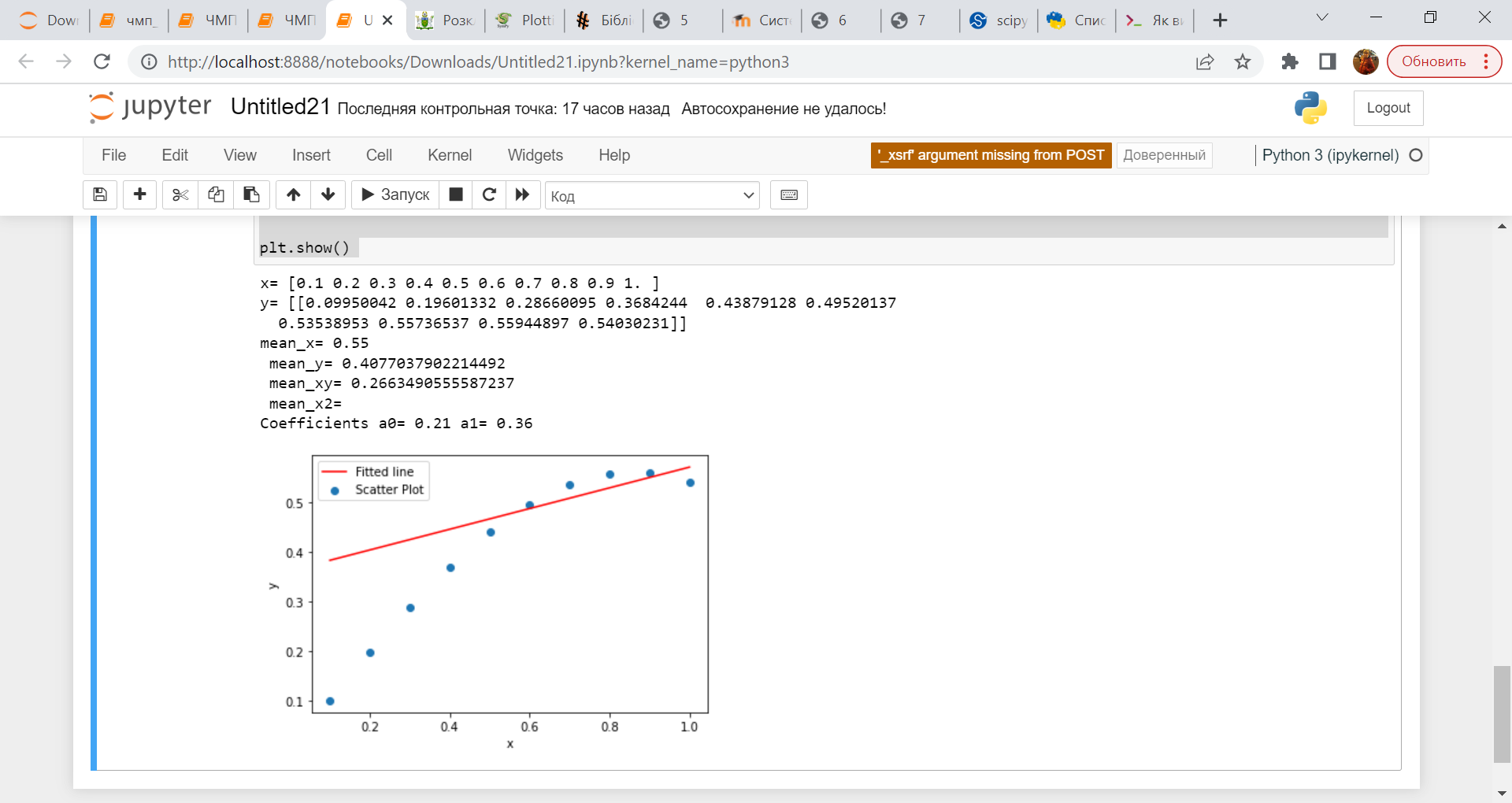
plt.scatter(x, y, label='Scatter Plot')

plt.title('M N K')

plt.xlabel('x')

plt.ylabel('y')

plt.legend()

plt.show()

Звіт має містити

1. ПІП, варіант, група
2. Аналітичні розрахунки (exel)
3. Код+скрін
4. Графіки (задані точки і отриманий графік функції)

Примітка: Наближення прямою – обов'язково, наближення параболою (бажано).